

# 非線形振動モデルの系統的記述と活用に関する考察 – デジタルミュージアム・人文学分野における分析と紹介 –

## A Study on Systematic Description and Application of Non-linear Oscillation Models

### – Analysis and Introduction to Digital Museum and Humanities Area –

大野邦夫<sup>†</sup>  
Kunio OHNO<sup>†</sup>

<sup>†</sup>株式会社モナビITコンサルティング <sup>†</sup> Monavis IT Consulting Co. LTD.

Email: k-ohno@star.ocn.ne.jp

**あらまし** デジタルミュージアムの特徴として、実物では不可能な動的な可視化による可能性が挙げられる。その基本手法として、微分方程式を多次元ベクトル空間における解の軌跡として可視化する手法を、レイリー方程式・摩擦振動を例に、Pythonプログラミングを通じて可能とした。この手法は、非線形現象における自己組織化の端緒と言える自励振動という興味深い現象をモデル化するが、先に検討したファン・デル・ポール方程式に比べ汎用性の高いリエナールの式をベースに分析し、活用領域の拡大を可能にする手法を述べる。さらにファン・デル・ポール方程式がレイリー方程式の微分形として扱えることを示し、リエナールの式の汎用性を示すと共に、人文学や社会科学分野を包含する学際的分野への活用可能性を紹介した。

**キーワード** 非線形シミュレーション, 自励振動, 自己組織化, レイリー方程式, リエナールの式, 摩擦振動, Python

#### Abstract

A Merit of digital museums is the possibility of dynamic visualization that was impossible with real museums. Basic method is to visualize differential equations as the locus of solutions in the multidimensional vector space and the method has been realized through Python programming, using Rayleigh equation and Stick-Slip Oscillation as examples. This method models the interesting phenomenon of self-excited vibration, which can be said to be a simple example of self-organization model in nonlinear phenomena. Through Python programming, Rayleigh equation showed the interesting phenomena of self-excited vibration, based on the Lienard equation, which is simple and more abstract form than the Van der Pol equation previously considered. In addition, Van der Pol equation can be derived as a differential form of the Rayleigh equation, which proves the usability of Lienard equation. Then the Lienard equation can be widely applicable to interdisciplinary fields including the humanities and social sciences.

**Keywords** nonlinear simulation, self-excited oscillation, self-organization, Rayleigh equation, Lienard equation, Stick-Slip Oscillation, Python

## 1. はじめに

先の報告で、経済学分野における連立微分方程式によるモデル群を紹介し、景気の変動や社会変動のモデルに関してボルテラの非線形微分方程式で対応付ける可能性を検討した [1]。その基本的発想は、混沌とした無秩序な世界を対象に、非線形モデルを通じて自律的な秩序の構築を試みることにある。このような概念は自己組織化と呼ばれ、創造的なアイデアを生み出す可能性を秘めている。

以上のようなモデルの本格的な解析手法としては、カオスによる多様な要因を包含する手法が挙げられるが極めて煩雑である [2]。他方、このような非線形現象がもたらす自律的な変化の非常に単純なモデルは、粘性項を非線形化した二階の微分方程式であろう。このモデルを習得しておくこと、自然現象や社会現象における非線形要因がもたらす自律的な変化をモデル

化するためのアイデアの端緒になり、デジタルミュージアムやデジタル人文学分野でも有効な手法になると考えられる [3] [4]。

その基本的手法として、微分方程式により記述される系の解を多次元ベクトル空間における状態点のトラジェクトリで示す手法を説明し、具体的事例として二階の線形微分方程式の事例である減衰振動系を取り上げPythonプログラミングによる解法を紹介した [3]。次に減衰振動系の拡張として減衰項が非線形特性を有するファン・デル・ポール (Van der Pol) 方程式を取り上げて、非線形システムの特徴といえる自励振動について、Pythonプログラミングによる解法を紹介した [4]。

そのような手法を紹介する背景として、デジタルミュージアムの特徴として挙げられる動的な可視化を通じた展示の可能

性が挙げられる[5]. 例えば地磁気逆転現象などは, 地球外核の電磁流体に対する力学, 電磁気学, 流体力学, 熱力学などを連立させて解く必要があるが, 多元連立非線形微分方程式を解く必要がある[6].

本報告では, ファン・デル・ポール方程式[4]で紹介した自励振動における非線形項の係数を変位ではなく速度として扱う手法を取り上げる. 電気回路系だと電流に依存する抵抗に相当し 負性抵抗という物理的な概念に相当する. この概念に基づく基本式はリエナール (Lienard) の式と呼ばれ, その具体例としてレイリー (Rayleigh) の式と摩擦振動 (スティックスリップ振動) が挙げられる. 具体的に観察される自励振動としては, 摩擦振動が最も一般的である. 例えばバイオリンやチェロのような弦楽器の美しい音色は摩擦振動による自励振動であり, そのような観点から摩擦振動に興味を持たれ, その関係からリエナールの式やレイリーの式が解析された経緯があると思われる. ここでは, Pythonによる解法とシミュレーション手法を紹介しつつ, 自励振動の概念の応用に関して考察する.

## 2. 自励振動モデル

先の報告[4]で, 自励振動モデルの基本として下記のファン・デル・ポール方程式を取り上げた.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \dots (1)$$

(1)式は, 物理的な振動系として考えると, 粘性項が変位に依存することになる. すなわち,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \dots (2)$$

だが, 粘性項の非線形性は, 変位ではなく速度に依存する方が自然であろう. すなわち,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\left(\frac{dx}{dt}\right)\frac{dx}{dt} + x = 0 \quad \dots (3)$$

$g(dx/dt)dx/dt$ を, 改めて  $f(dx/dt)$ とすると(3)式は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f\left(\frac{dx}{dt}\right) + x = 0 \quad \dots (4)$$

という, 簡潔な式になる. 粘性項を非線形とする二階微分方程式は, フランス人技術者のリエナールにより検討されたことが知られている[7]. その結果, (4)式はリエナールの式と呼ばれている. 力学系では負性抵抗要因として摩擦が問題になることが多いが, ファン・デル・ポール方程式よりもこの式の方が物理現象との対応が自然に適合する. (4)式を連立一階微分方程

式として記述すると,

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \dots (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = -f(y) - x \quad \dots (6)$$

リエナールの式的具体例としては,

$$f(y) = \mu\left(\frac{y^3}{3} - y\right) \quad \dots (7)$$

としたレイリー (Rayleigh) の式が有名である. なおレイリーの式は, 解析的にファン・デル・ポール方程式に変形させることが可能である. 力学的な物理現象として幅広く観察される摩擦振動 (スティックスリップ振動) も, (4)式で記述されるリエナールの式に包含される.

## 3. Pythonプログラム

レイリーの式は, リエナールの式の一つの事例なので, (5), (6)式で示される汎用的なリエナールの式を関数として定義し, (6)式における  $f(y)$ をレイリーの式として関数定義する. レイリーの式を, Pythonプログラムで記述すると下記のような先滅衰振動やファン・デル・ポール方程式の場合と類似の構成だが, 抽象度が高いリエナールの式における粘性項を, 分離して独立した関数として冒頭で定義する構成としている.

-----Python プログラム-----

```
def f(y):
    # Rayleigh 方程式
    return mu * (y * y * y / 3 - y) # (7)式

def lienard_osc(n):
    # 初期値設定
    x = u[0]
    y = v[0]
    s = 0.0
    dx = 0.0
    dy = 0.0
    ds = 0.01
    i = 1
    while i < n :
        # 繰り返し演算
        dx = y * ds # (5)式
        dy = - (f(y) + x) * ds # (6)式
        x = x + dx
        y = y + dy
        u.append(x)
        v.append(y)
        w.append(s)
```

```

s = s + ds
i = i + 1
# main
mu = 1 # μの値
u = [0.01]
v = [0.0]
w = [0.0]
n = 10000
lienard_osc(n)
# graphic
from matplotlib import pyplot
X = u
Y = v
pyplot.scatter(X,Y, c='b', s=1, label='Rayleigh_Oscillation')
pyplot.title("Rayleigh_Oscillation")
pyplot.show()
-----Python プログラム おわり-----

```

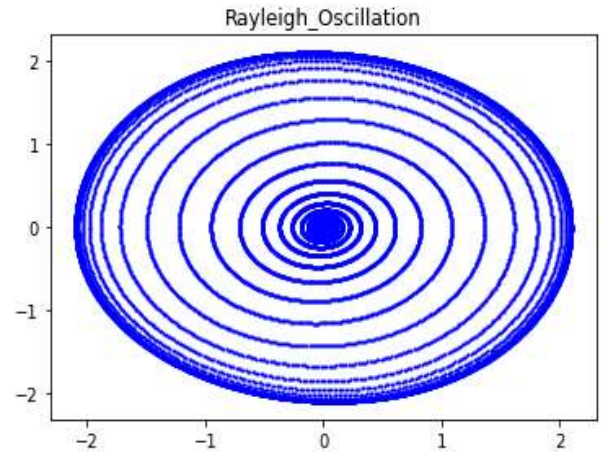


図2 μ=0.1における位相平面トラジェクトリ

#### 4. シミュレーション結果

図1は、 $\mu = 0.1$ の時の変位波形である。縦軸に変位(x), 横軸に時間(s)を取り, 初期値を $x=0.01, y=0$ として描いている。最初に指数関数的に振幅が増大し  $x$ が1を超えると振幅の増大の程度が減少し, 振幅 $x$ が2に近づくと飽和・収束する。

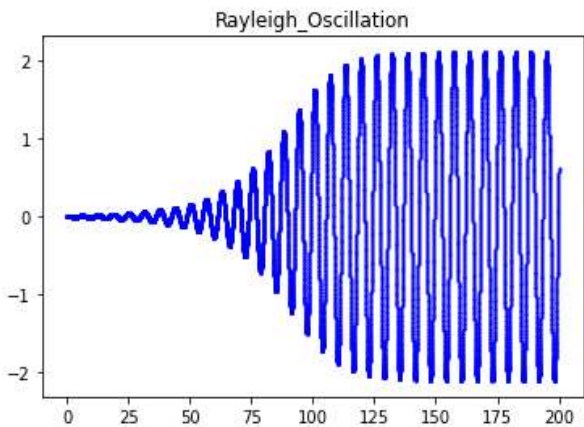


図1 μ=0.1における変位xの表示

図2は, 図1と同じ条件で, 縦軸を速度, 横軸に変位を取った位相平面上の解軌跡(トラジェクトリ)とした結果である。原点付近から始まって, 螺旋を描きながらスパイラルが拡大し, 振幅が2に近づくと楕円に収束する様子が見られるであろう。このように, 長い時間が経ってトラジェクトリが閉じた図形に収束する場合の図形をリミットサイクルと呼ぶ。

図3は,  $\mu$ の値が0.5の場合の位相平面図である。リミットサイクルの形状がやや角ばってくると共に, 図4に示すようにリミットサイクルに至る時間も短縮される。図1では, リミットサイクルに至る時間が, 無次元化された時間で125程度であるが, 図4では30程度に短縮されている。

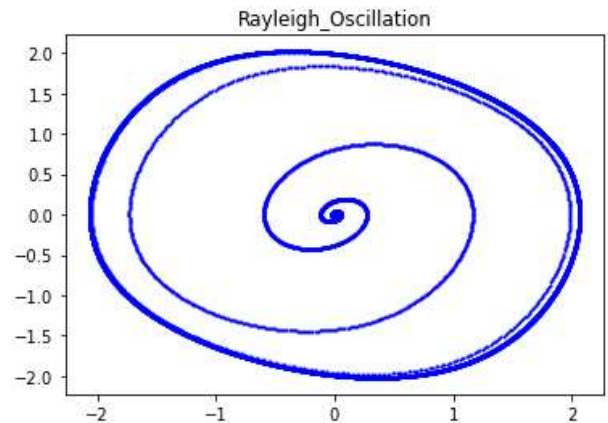


図3 μ=0.5における位相平面トラジェクトリ

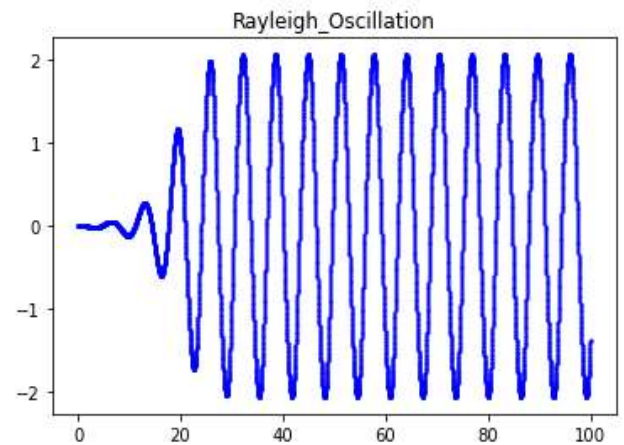


図4 μ=0.5における変位波形

図5は,  $\mu = 1$ の場合のリミットサイクルである。図3の $\mu = 0.5$ の場合に比べると, リミットサイクルの形状が角ばってくる状況が観察される。

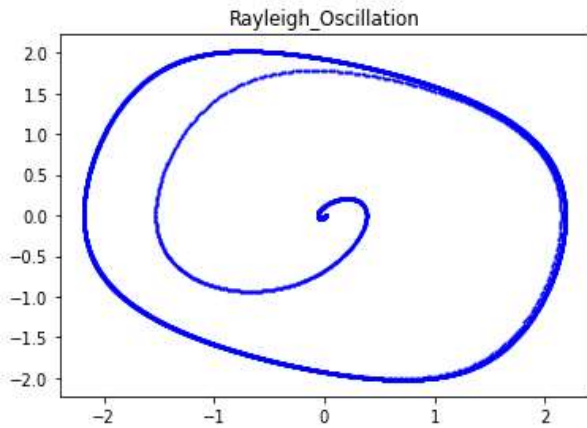


図5  $\mu=1$ における位相平面トラジェクトリ

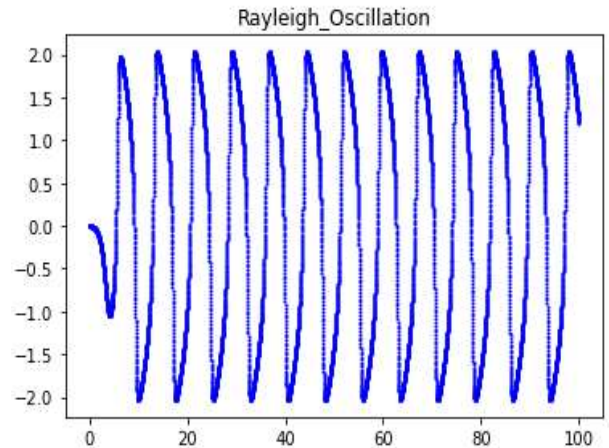


図8  $\mu=2$ における速度波形

すなわち変位波形が先が尖ったようなやや歪んだ正弦波の波形なのに対して、速度波形はピーク到達までの勾配が急激でピーク到達後のカーブが緩やかになっている状況が観察される。波形の振幅に注目すると、速度に関してはほぼ2.0程度で一貫して変わらないが、変位は $\mu=2$ の場合には2を上回り、3に近い値になっている。

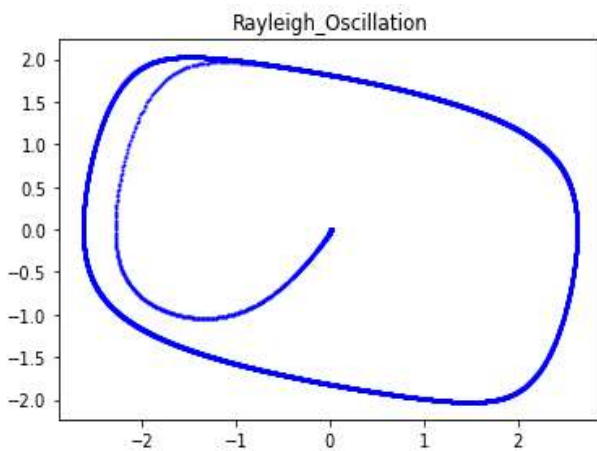


図6  $\mu=2$ における位相平面トラジェクトリ

図6は、 $\mu$ の値が2の場合の位相平面図である。リミットサイクルの形状が角ばる状況は、時間に対する変位波形(図7)と、時間に対する速度波形(図8)との相違にも反映される。

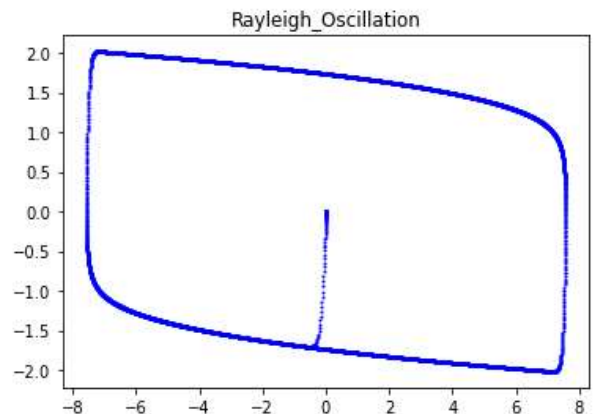


図9  $\mu=10$ における位相平面トラジェクトリ

図9、は $\mu=10$ の場合の位相平面図である。 $\mu$ の増加に対して、角ばった状況が著しくなると共に、変位の振幅が著しく増大する状況が観察される。 $\mu$ が2の場合の変位の振幅が3をやや下回る程度、 $\mu$ が10の場合は7.5程度になる。それでも速度の振幅は2程度で変わらない。

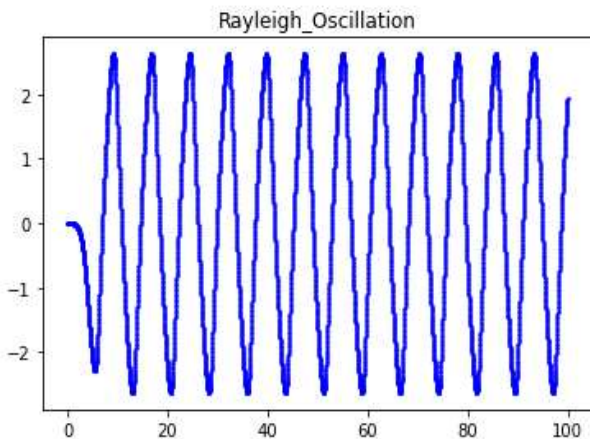


図7  $\mu=2$ における変位波形

さらに、 $\mu$ が10の場合の変位波形(図10)と速度波形(図11)を示すが、変位が三角波的になるのに対して、速度が矩形波的になることが分かる。速度は変位の時間微分なので、三角波の微分が矩形波になるのは常識的である。

$\mu$ の増大に伴い、振動の波長が増大する。図4の $\mu=0.5$ の場合の波数は14程度であるが、図10の $\mu=10$ の場合の波数は5程度で半分以下になっている。これは、間歇動作的になるので、振

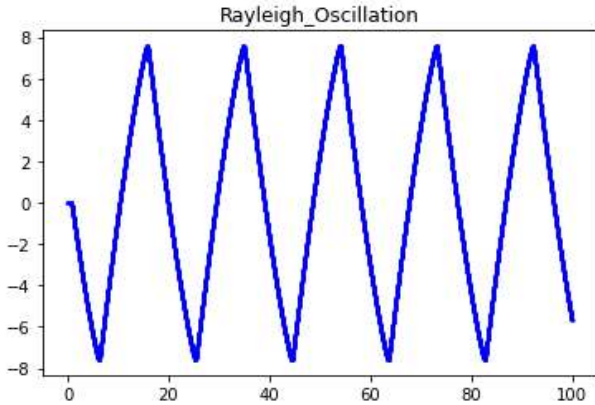


図10  $\mu=10$ における変位の表示画面

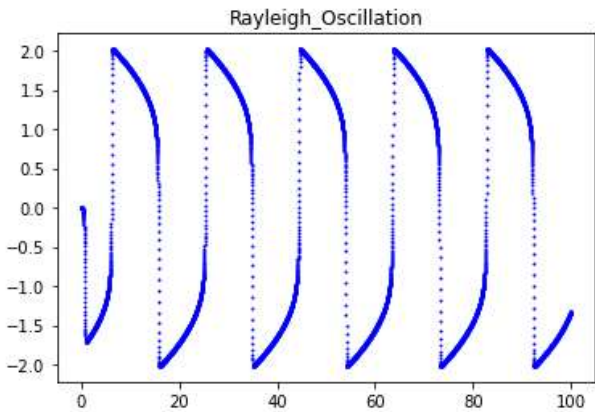


図11  $\mu=10$ における速度の表示画面

動現象が緩慢になり波数,すなわち振動数が減少するためである.粘性項という物理的な意味を考えると, $\mu$ が小さい場合は,固有振動を形成する質量とばね定数が振動数の主要因となるが, $\mu$ が大きくなると,粘性項が主要因となり抵抗成分となって速度を低下させ,振動数を減少させると考えれば良い.

## 5. 摩擦振動

### 5.1 基本モデル

摩擦振動をリエナールの式の事例として検討する.具体的モデルとして図12に示す系を考える.これは自由度1のばね質量系で,質量 $m$ の物体が一定速度 $V_f$ で走行する粗いベルト上に置かれている場合を考える.物体の静止している位置を原点にとり,移動ベルトの移動方向 $x$ 軸を取り,時刻 $t$ における物体の位置を $x$ とする.なお,ここではばねの自然長の位置を, $x=0$ としている.この場合,物体と移動ベルトとの相対速度 $V_{ss}$ は, $V_f - dx/dt$ となり,移動ベルトが物体に及ぼす摩擦力は, $F(V_f - dx/dt)$ となる.一般に,この摩擦力は,相対速度 $V_{ss}$ に関する奇関数で, $V_{ss}$ が正の時に $F(V_f - dx/dt)$ であれば, $V_{ss}$ が負の時には, $-F(dx/dt - V_f)$ となる.

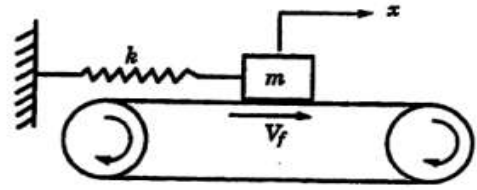


図12 摩擦振動系

図12に示す系の場合,運動方程式は,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = F(V_f - \frac{dx}{dt}) \quad \dots \dots (8)$$

ここで先の単振動モデルと同様に, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , $s = \omega_n t$ として無次元化すると

$$\frac{d^2x}{ds^2} + x = f(v_f - \frac{dx}{ds}) \quad \dots \dots (9)$$

なお

$$f(v_f - \frac{dx}{ds}) = F(\frac{V_f - dx/dt}{2m\omega_n}) \quad \dots \dots (10)$$

ここで $s$ を改めて $t$ とすると(8)式は,

$$\frac{d^2x}{dt^2} - f(v_f - \frac{dx}{dt}) + x = 0 \quad \dots \dots (11)$$

となる.これを連立一階微分方程式に直すと,

$$\frac{dx}{dt} = y \quad \dots \dots (12)$$

$$\frac{dy}{dt} = f(v_f - y) - x \quad \dots \dots (13)$$

### 5.2 摩擦特性

(13)式の $f(v_f - y)$ は,抽象化された速度摩擦特性で,一般に図13のような特性として知られている.さらにこの特性は,乾性摩擦,粘性摩擦,境界摩擦を合成してモデル化可能なことも知られている.

(13)式における $f(v_f - y)$ の $v_f - y$ は, $V_f - dx/dt$ の無次元化された相対速度で, $f(v_f - y)$ は,この相対速度に対して奇関数となる. $v_f - y = v_s$ とすると, $f(v_s)$ は下記ようになる.

$v_s > 0$ の場合:

$$f(v_s) = c_0 + c_1 v_s + \frac{c_2}{v_s + c_3} \quad \dots \dots (14)$$

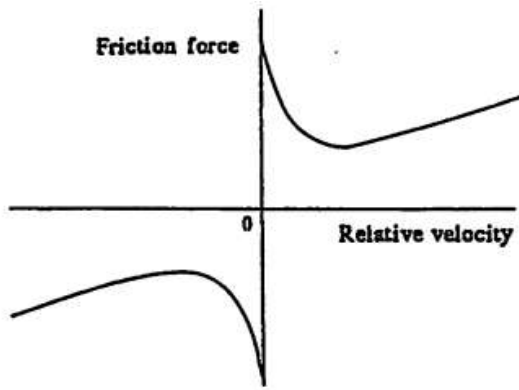


図13 速度摩擦特性

$v_s = 0$  の場合 :

$$f(v_s) = 0 \quad \dots \dots (15)$$

$v_s < 0$  の場合 :

$$f(v_s) = -c_0 + c_1 v_s - \frac{c_2}{v_s - c_3} \quad \dots \dots (16)$$

以上に基づき, Pythonでリエナールの式に基づきプログラムを作成するが,基本的には先に検討したレイリーの式のプログラムの粘性項(速度微分の項)を書き替えるだけである.

### 5.3 Pythonプログラム

以上示してきたプロセスを, Pythonプログラムで記述すると下記のようなになる.

-----Python プログラム-----

#摩擦振動 (Stick Slip Oscillation)

#リエナールの式の粘性項f(y)

```
def f(y):
    # 摩擦特性
    vs = vf - y # 相対速度
    if vs > 0: # (14)式
        return c0 + (c1 * vs) + (c2 / (vs + c3))
    elif vs == 0: # (15)式
        return 0
    else: # (16)式
        return - (c1 * vs) - c0 - (c2 / (vs + c3))
```

def lienard\_osc(n):

# 初期値設定

x = u[0]

y = v[0]

s = 0.0

dx = 0.0

dy = 0.0

ds = 0.001

i = 0

while i < n :

```
# 繰り返し演算
dx = y * ds # (12)式
dy = -(f(y) + x) * ds # (13)式
x = x + dx
y = y + dy
u.append(x)
v.append(y)
w.append(s)
s = s + ds
i = i + 1

# main
c0 = 0.1 # 乾性摩擦
c1 = 0.2 # 粘性摩擦
c2 = 0.1 # 境界摩擦
c3 = 0.1 # 境界摩擦
vf = 0.1
u = [0.0]
v = [0.0]
w = [0.0]
n = 100000
lienard_osc(n)

# graphic
from matplotlib import pyplot
X = w
Y = v
pyplot.scatter(X,Y, c='b', s=1, label='Stick-slip_Oscillation')
pyplot.title("Stick-slip_Oscillation")
pyplot.show()

-----Python プログラムおわり-----
```

なお, 上記における関数 def lienard\_osc(n): は, 3章のレイリーの式のプログラムの関数と全く同様であることに注意してほしい.このように抽象度を高めた共通概念を共用することにより,モデルを明確化し分かりやすいプログラムとすることができる.

## 6. シミュレーション結果

### 6.1 ベルト速度が遅い場合

グラフィック機能を使用するためには, matplotlibというライブラリが必要で, そのためにはAnacondaと呼ばれる統合環境を用いる. Anacondaには, Jupyter Notebookというツールがあり, それを用いてプログラムを記述して実行させるが, その段取りは先の報告に記した.

図14は,  $vf=0.1$ の時の変位波形である. 縦軸に変位(x), 横軸に時間(s)を取り, 初期値を  $x=0, y=0$  として描いている.

図12に示す系が,  $vf=0.1$ という比較的遅いベル速度で運動する現象は, 下記のようなになる.

- (1) 最初に物体がベルト上に固着して運ばれる (Stick状態).
- (2) ばねが伸びて固着が解除され, ベルト上を原点に向かって移動する (Slip状態).

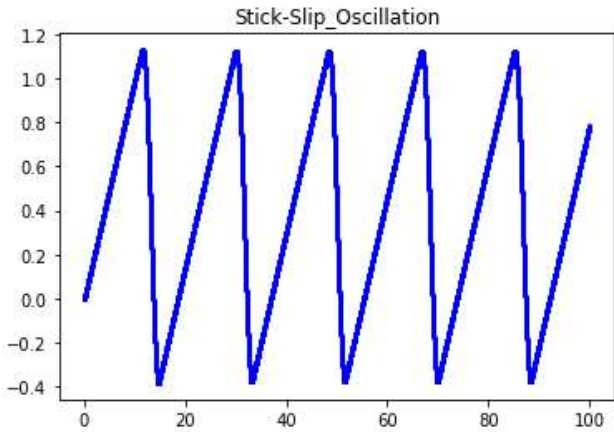


図14  $vf=0.1$ における変位 $x$ の表示

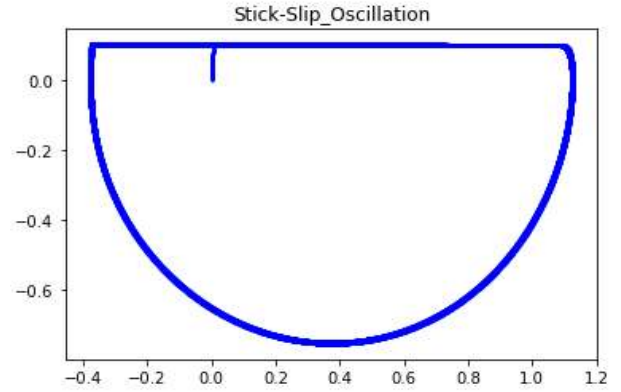


図16  $vf=0.1$ における位相平面トラジェクトリ

(3)その後慣性のために原点を超えてばねの力で抑えられて速度が低下する (Slip状態)。

(4)いったん静止した後に反転し、ベルトの速度と等しくなった時に再度ベルトに固着し、(1)の状態に移行する (Stick状態)。

図15は、図14と同じ条件で、縦軸を速度、横軸に時間を取った速度波形を示す。物体がベルトに固着 (Stick) すると $vf$ の値である0.1になり固着が解除されると (Slip) マイナス方向の速度が生じて、 $-0.75$ 辺りをピークに反転し、再度ベルトに固着 (Stick) して $vf$ の値になる。

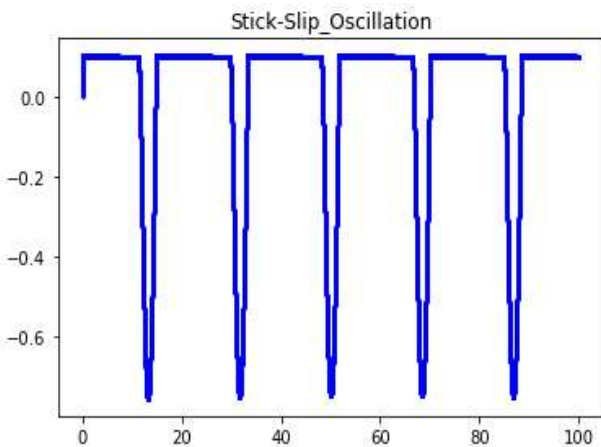


図15  $vf=0.1$ における速度 $y$ の表示

## 6.2 速度の増大の影響

図17は、 $vf$ の値が0.5の場合の位相平面図である。図16の場合に比べてリミットサイクルの振幅が変位、速度共に増大する。

図18は、 $vf=0.5$ の変位波形であるが、図14に比べると振動数が

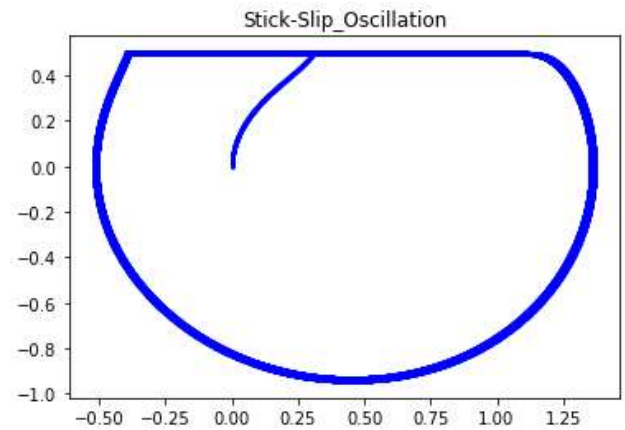


図17  $vf=0.5$ における位相平面トラジェクトリ

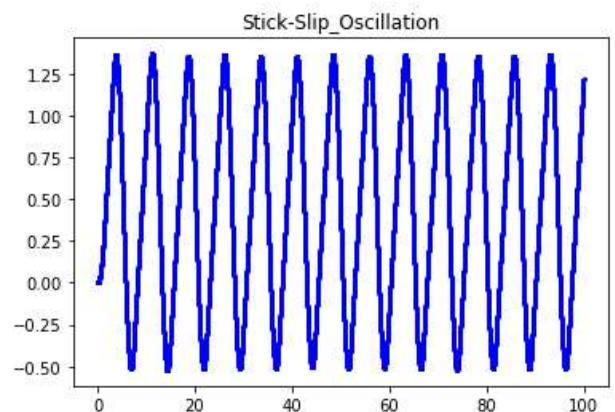


図18  $vf=0.5$ における変位波形

図16は、図14・図15と同じ条件で、縦軸を速度、横軸に変位を取った位相平面上の解軌跡 (トラジェクトリ) としての結果である。原点から瞬時に固着して速度  $vf$  (0.1) で $x$ 方向に増大し、 $x$ の値が1.1を超えた辺りで固着が解除されて (Slip) 半円を描いてマイナス方向に移動し、 $y$ の値が $vf$ になった時点で、再度固着して、 $x$ の正方向に移動する。このような周期的なトラジェクトリを描く。このような摩擦振動としてのStick-Slipも、閉じた図形に収束するのでリミットサイクルを描くことになる。

増大していることが示される。これは、ベルトの速度が増大するために、固着時間が減少することに対応する。図19は対応する速度波形である。最初に $vf$ の値の0.5に固着して、固着が解除され滑り出して移動した後に再度固着して $vf$ で移動し、再度固着が解除されるプロセスを繰り返すことが分かる。

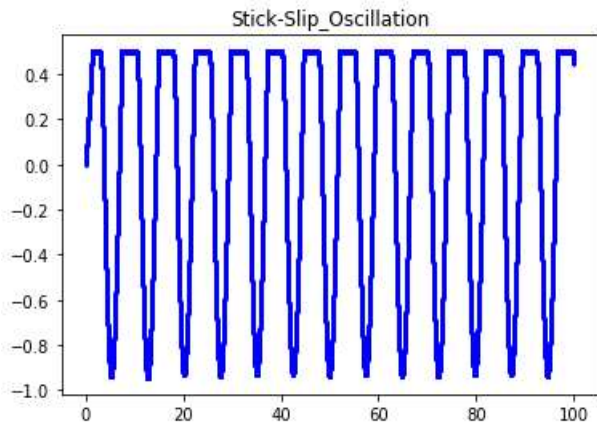


図19  $vf=0.5$ における速度波形

図20は、 $vf=0.6$ の場合のリミットサイクルである。原点からベルトに固着する前に連続的な粘性振動を行った後にベルトに固着してリミットサイクルを描くことが分かる。

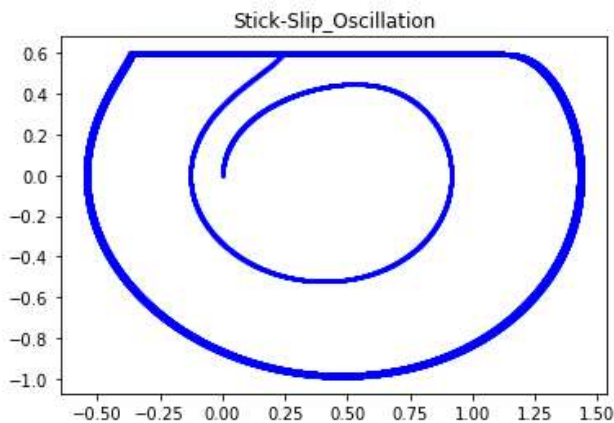


図20  $vf=0.6$ における位相平面トラジェクトリ

図21は、 $vf=0.7$ の場合の位相平面図である。トラジェクトリは、緩やかな減衰振動を描く。変位波形を図22に示すが、摩擦振動特有のStick-Slipのリミットサイクルは描かれない。これはベルトの速度が大きくなることにより、乾性摩擦、境界摩擦に比べて粘性摩擦の影響が強まるためである。

図23は、 $vf=0.8$ の場合の位相平面図である。トラジェクトリは、減衰振動を描いて安定な平衡点に収束する。

変位波形を図24に示す。粘性項が主要因になるために、典型的な減衰振動波形となる。

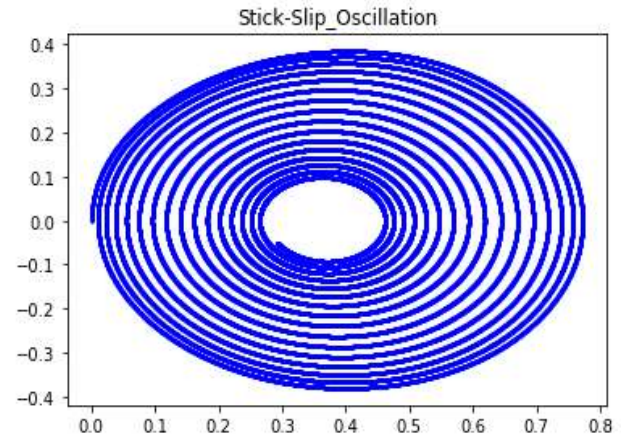


図21  $vf=0.7$ における位相平面トラジェクトリ

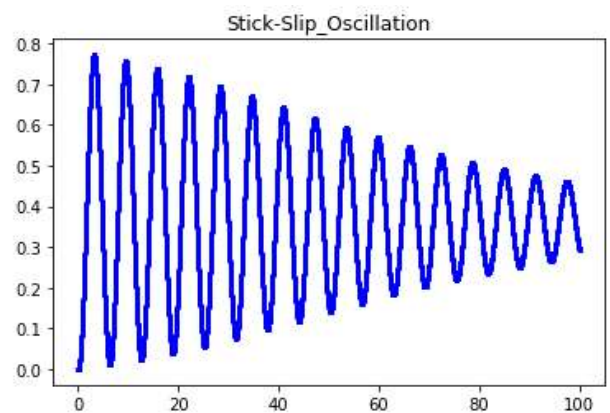


図22  $vf=0.7$ における変位波形

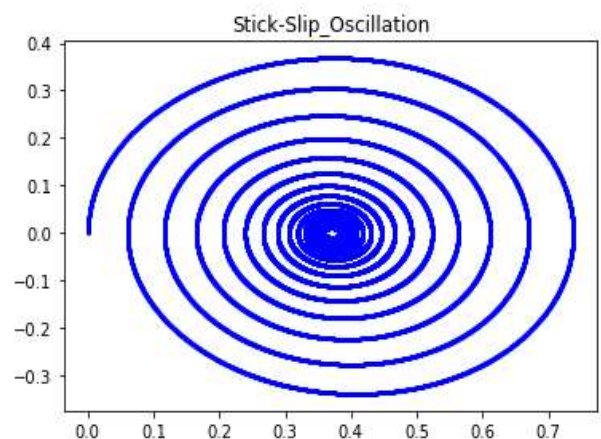


図23  $vf=0.8$ における位相平面トラジェクトリ

### 6.3 まとめ

以上、Pythonプログラムによる摩擦振動のシミュレーション手法とその具体的事例の結果について示した。図12に示すモデルのベルトの移動速度が小さい場合は、図14に示すような

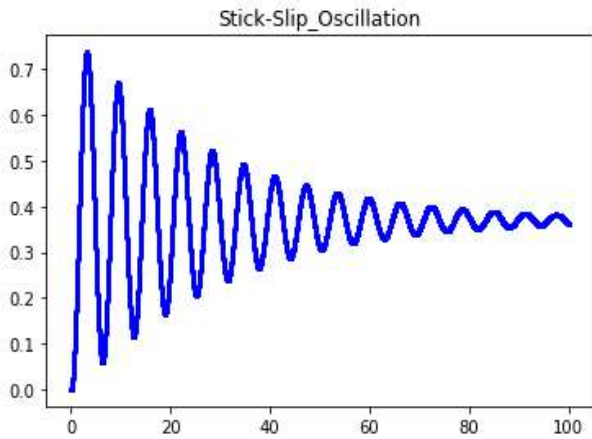


図24  $\nu f=0.8$ における変位波形

鋸歯状波の挙動を示し図16の位相平面のトラジェクトリのような半円形のリミットサイクルとなる。移動速度が増大するにつれ鋸歯状波の挙動から振動的な波形になり振動数も増加する。さらに移動速度が増大し振動数が増加すると、リミットサイクルを描かなくなり、正の粘性項を持つ減衰振動に近い挙動となる。

リミットサイクルを描かなくなる状況は、ベルトの移動速度における物体の速度が、振動系の固有振動の運動における速度に近接して、静的な摩擦(Stick)によるエネルギー供給が困難になる状況が挙げられる。そのような状況においては、静的な摩擦のない動的なバランス状態で固有振動数による自由振動が生じ、それが自励振動的な振幅増大に結び付けば、リミットサイクルに発展するが、自由振動が減衰振動的であれば、振動は収束し、正の粘性項を持つ減衰振動的な挙動となる。

## 7. 考察

### 7.1 レイリーの式とファン・デル・ポール方程式との対比

先の報告[4]で紹介したファン・デル・ポール方程式と、今回のレイリーの式とを比べて、類似点と相違点を整理すると両者の特徴を通じた自励振動現象が明確になると思われる。位相平面図を比べるとファン・デル・ポール方程式は $\mu$ が増大するにつれてリミットサイクルの形状が楕円から角ばった瓢箪型に変化する[4]。他方レイリーの式はリミットサイクルの形状が楕円から矩形に変化する。

波形の形状は、ファン・デル・ポール方程式は $\mu$ が増大するにつれて、変位が徐々に矩形波的になり、速度がパルス波的になる。その際に変位の振幅が2程度で変わらないのに対して、速度の振幅が増大する[4]。他方、レイリーの式では、 $\mu$ の増大につれて、変位が徐々に三角波的になり、速度が矩形波的になる。その際速度の振幅が2程度で変わらないのに対して、変位の振幅が増大する。

以上のように、 $\mu$ が小さい場合はリミットサイクルは共に楕円で、変位波形、速度波形とも正弦波形的であるが、 $\mu$ が大きくな

ると、共に間歇現象的になり、振動数が減少するという状況は共通である。その場合に、レイリーの式とファン・デル・ポール方程式の変位波形は酷似したものになるに注目すべきである。

その背景として、ファン・デル・ポール方程式は、レイリーの式を微分して得られることが挙げられる。すなわち、(6)式を時間微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{d}{dt}(\mu f(y)) - \frac{dx}{dt} \\ &= -\left(\mu \frac{dy}{dt} \frac{df}{dy}\right) - \frac{dx}{dt} \\ &= -\mu \frac{dy}{dt} \frac{d}{dy} \left(\frac{y^3}{3} - y\right) - y \\ &= -\mu \frac{dy}{dt} (y^2 - 1) - y \quad \dots \dots (17) \end{aligned}$$

となり、移項すると、

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \mu(y^2 - 1) \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad \dots \dots (18)$$

が得られる。これは(1)式の $x$ を $y$ に置き換えただけのファン・デル・ポール方程式そのものである。ということから、レイリーの式とファン・デル・ポール方程式の変位波形が同様になる。

### 7.2 汎用記述化とオブジェクト指向

今回の検討では、先のファン・デル・ポール方程式という自励振動の例をより抽象的・一般的に扱えるリエナールの式を定義し、その具体例としてレイリーの式と摩擦振動の場合についてプログラムを作成し実行した。なおファン・デル・ポール方程式に関しては、減衰振動を基に、減衰項が正の場合は振幅が徐々に減衰し、例外的でふああるが減衰項が負の場合は振幅が増大することから、減衰項を $\mu(x^2 - 1)$ とすることにより自励振動が生じることを式の誘導の出発点にした。このように考えると、非線形振動は、新たな要因が加わるごとに振動現象が展開し、新たなモデルに拡張可能なことが分かる。この拡張可能性が冒頭で述べた「自己組織化」の概念をもたらすと云えるであろう。

このように概念を拡張していく手法は、クラスをサブクラスとして継承して展開定義するオブジェクト指向プログラミングの手法に適合する[8]。最も単純な振動系は、ばねと質量の二つのパラメータによる単振動である。それに正の定数による減衰項が加わって減衰振動モデルが形成される。その減衰項に $\mu$ という影響の程度を示すパラメータと変位を含む関数を導入したのがファン・デル・ポール方程式である。レイリーの式は、ファン・デル・ポール方程式の積分表現であるが、粘性項

が速度の関数でまとめられるので自然現象などに対してはより一般的に扱うことが可能になる。

なおクラス継承は、特化する場合と汎化する場合があります。減衰振動は単振動の事例としての特化であるが、ファン・デル・ポール方程式は減衰振動モデルの概念を新概念の自励振動に拡張する汎化である。レイリーの式は自励振動の概念をより抽象的な概念に汎化したモデルであるが、それを特化したモデルが具体的な振動に対応するレイリーの式や摩擦振動である。リエナールの式自体は抽象的なモデルで、オブジェクト指向のクラス継承概念ではサブクラスのみでインスタンスを持たないミクシン(Mix-in) [8]に対応する概念である。以上の継承関係をクラス図で示すと図25のようになる。

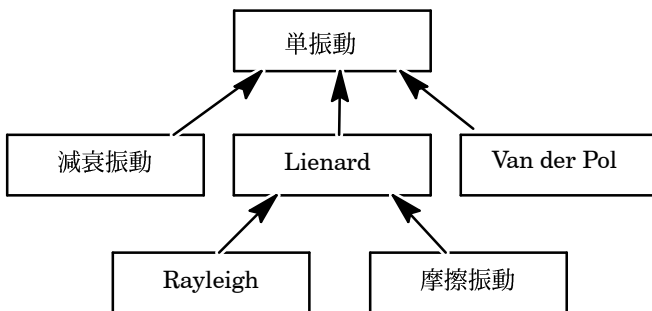


図25 単振動を出発点とするクラス継承

摩擦振動はバイオリンやチェロ等の弦楽器の音源として日頃頻繁に接している。あの美しい音色は弦と弓との負性抵抗となる摩擦特性から生じるものである。人類の遺産である弦楽器による名曲が摩擦振動によることを考えると、芸術と数理モデルとの興味深い関係を思わざるを得ない。このような領域もデジタル人文学の一領域でありこのような分野に興味を抱き取り組む人材の育成もDMH研究会の課題と思われる。

自励振動と自己組織化を結びつける一つの手法として繰り返しパターンのモデル化が挙げられる。先の報告における経済モデルにおける景気循環はその一例である [1]。その他人文学分野としては、歴史における繰り返しパターンが挙げられる。以前西洋文化と日本文化の接触パターンについて分析したことがあるが [9]、そのようなパターンの背後に負性抵抗のような非線形メカニズムが存在するかもしれない。このような分野の数理モデル化もデジタルミュージアム・人文学分野の課題であろう。

## 8. おわりに

以上、非線形粘性項を有する振動系であるファン・デル・ポール方程式を端緒に、自励振動、間歇現象などを生じるモデ

ルをリエナールの式として抽象的・一般的に扱える対象とし、その具体例としてレイリーの式と摩擦振動の場合について紹介し、Pythonを活用して分析し考察した。

微分方程式で記述される系を状態空間のトラジェクトリで把握する手法は、興味深いのであるが、物理系のカオスや社会経済分野における多元的な要因を包含する世界 [10]では、却って混乱が生じるようにも感じられる。

従って主要因を抽出して、単純なモデルであるファン・デル・ポール方程式やレイリー方程式、ボルテラの式 [1]等に帰着させるようなセンスが重要であろう。

デジタルミュージアムのコンテンツでシミュレーションを活用するような展示が期待されるが、デジタルキュレータとしての学芸員の人にはそのようなスキルが期待される。このスキルは、単にコンテンツ技術という視点だけでなく、地域の文化コミュニティの拠点としての放課後型博物館的な運営 [11]を通じたコミュニティの活性化にも貢献し得ると考えられる。

## 文献

- [1] 大野邦夫, “デジタルミュージアム・人文学分野における数理モデルの検討～経済成長モデルとVolterraの微分方程式を例として”, 画像電子学会第8回デジタルミュージアム・人文学研究会資料, Feb. 2025
- [2] J.M.T. Thompson, H.B. Stewart (武者利光, 橋口住久訳), “非線形力学とカオス～技術者・科学者のための幾何学的手法”, オーム社, 1988
- [3] 大野邦夫, “微分方程式で記述される系のPythonによるシミュレーション～事例としての減衰振動モデルによる位相平面解析”, 画像電子学会第309回研究会講演論文, Jun. 2024
- [4] 大野邦夫, “非線形モデルによる自励振動のシミュレーション～Pythonによるファン・デル・ポール方程式の位相平面解析”, 画像電子学会第51回年次大会, Aug. 2024
- [5] 大野邦夫, “Webサービスにおける仮想ミュージアムへの考察～物語性とキュレーションの観点から～”, 画像電子学会第1回デジタルミュージアム・人文学研究会資料, Mar. 2021
- [6] 大野邦夫, 梶原俊男, “地磁気逆転地層理解に関するバーチャルミュージアムの検討”, 2018年度画像電子学会年次大会講演論文, Jun. 2018
- [7] ボゴリューボフ, ミトロポリスキー, “非線形振動論～漸近的方法”, 共立出版, 145-158, 1961
- [8] 大野邦夫, “オブジェクト指向雑記(その1)～データ構造とアルゴリズムからモノと感性によるプログラミングへ”, 画像電子学会誌, Vol.52, No.2, pp.368-372, 2023
- [9] 大野邦夫, 西口美津子, “異文化交流、歴史評価へのマトリックス履歴書表現の適用”, 情報処理学会研究報告, CH107-4, Aug. 2015
- [10] 佐藤隆三, “経済成長の理論”, 勁草書房, 1968
- [11] 大野邦夫, 梶原俊男, 木村登志子, “博物館・美術館の社会的考察～Web社会における遠足型と放課後型”, 画像電子学会第5回デジタルミュージアム・人文学研究会資料, Mar. 2023